УДК 519.635.2

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

В.Н. СЕМЕНОВА

Димитровградский инженерно-технологический институт — филиал Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», г. Димитровград
E-mail: vnsemenova@mephi.ru

APPROXIMATE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR EQUATION OF GROUNDWATER FLOW

V.N. SEMENOVA

Dimitrovgrad Engineering Institute of Technology - branch of the National Research Nuclear University «MEPHI», Dimitrovgrad

Аннотация

Рассматривается начальная задача для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных. Задача описывает движение грунтовых вод. Получены формулы для приближенных решений. Предлагаемый подход заключается в последовательном решении ряда вспомогательных задач.

Ключевые слова: Математическая модель, задача Коши, приближенное решение, степенной ряд.

Summary

We consider the initial value problem for nonlinear differential equations in partial derivatives. The problem describes the movement of groundwater. The formulas for the approximate solutions are obtained. The proposed approach is a consistent solution of a number of auxiliary problems.

Key words: Mathematical model, Cauchy problem, an approximate solution, the power series.

1.Постановка задачи

Рассмотрим начальную задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial h}{\partial t} = r\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(H\left(x,y\right)+h\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right] + r\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(H\left(x,y\right)+h\right)\frac{\partial h}{\partial y}\right], (x,y)\in R^2 t\in[0,T] \qquad (1)$$

$$h(x,y,0) = h_0(x,y), (x,y)\in R^2 \qquad (2)$$

Данная задача является математической моделью движения грунтовых вод [1]. В уравнении (1) $h(x,y,t)$ — уровень грунтовых вод, неизвестная функция, где t — время, (x,y) — координаты, $h_0(x,y)$ — известная функция, которая задает уровень грунтовых вод при $t=0$, $H(x,y)$ — известная достаточно гладкая функция, которая описывает подстилающую поверхность, $r=\mu\rho g/m$, где μ — коэффициент, зависящий от свойств грунта, $m>1$ — коэффициент пористости грунта, ρ — плотность жидкости.

В силу нелинейности дифференциального уравнения (1), которое является уравнением Буссинеска, найти решение поставленной начальной задачи аналитически не представляется возможным. Приближенное решение будем строить следующим образом: получим формулы для нахождения приближенных решений вспомогательной задачи на малом промежутке изменения переменной $t\in[a,a+\tau]$; для решения исходной задачи необходимо последовательно решить вспомогательные задачи, полагая $a=0$, $a=\tau$, $a=2\tau,\ldots$, $a=T-\tau$.

При практическом решении полагаем $(x, y) \in D$, где D − произвольная область на плоскости R^2.

2. Приближенное решение

Рассмотрим вспомогательную начальную задачу на малом промежутке $t \in [a, a+\tau]$.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = r\frac{\partial}{\partial x}\left[(H(x,y)+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right] + r\frac{\partial}{\partial y}\left[(H(x,y)+h)\frac{\partial h}{\partial y}\right], (x,y) \in R^2, t \in [a, a+\tau] \tag{3}$$

$$h(x,y,a) = h_0(x,y), (x,y) \in R^2 \tag{4}$$

Решение $h(x, y, t)$ ищем в виде ряда по степеням $t - a$ в правой τ − полуокрестности точки $t = a$.

$$h(x,y,t) = h_0(x,y) + \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x,y)(t-a)^k = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x,y)(t-a)^m \tag{5}$$

Перепишем уравнение (3) вспомогательной задачи в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} = r\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + rH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + rh\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + r\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + r\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} + rH\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + rh\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + r\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 \tag{6}$$

Дифференцируем ряд (5) в правой полуокрестности в правой τ − полуокрестности точки $t = a$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(x,y)(t-a)^{m-1} = \sum_{r=0}^{\infty}(r+1)h_{r+1}(x,y)(t-a)^r$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial h_m(x,y)}{\partial x}(t-a)^m$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial h_m(x,y)}{\partial y}(t-a)^m$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^2 h_m(x,y)}{\partial x^2}(t-a)^m$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^2 h_m(x,y)}{\partial y^2}(t-a)^m$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial h_m(x,y)}{\partial x}(t-a)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial h_k(x,y)}{\partial x}(t-a)^k =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial h_m(x,y)}{\partial x}\frac{\partial h_k(x,y)}{\partial x}(t-a)^{m+k} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r} \frac{\partial h_{r-k}(x,y)}{\partial x}\frac{\partial h_k(x,y)}{\partial x}(t-a)^r$$

Аналогично:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r} \frac{\partial h_{r-k}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial h_k(x,y)}{\partial y}(t-a)^r$$

$$h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r} h_{r-k}(x,y)\frac{\partial^2 h_k(x,y)}{\partial x^2}(t-a)^r$$

$$h\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r} h_{r-k}(x,y)\frac{\partial^2 h_k(x,y)}{\partial y^2}(t-a)^r$$

Подставляем ряды, полученные в результате дифференцирования, в равенство (6)

$$\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)h_{r+1}(x,y)(t-a)^r = r\frac{\partial H}{\partial x}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\partial h_r(x,y)}{\partial x}(t-a)^r +$$

$$+rH\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\partial^2 h_r(x,y)}{\partial x^2}(t-a)^r+r\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r}h_{r-k}(x,y)\frac{\partial^2 h_k(x,y)}{\partial x^2}(t-a)^r+$$

$$+r\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r}\frac{\partial h_{r-k}(x,y)}{\partial x}\frac{\partial h_k(x,y)}{\partial x}(t-a)^r+r\frac{\partial H}{\partial y}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\partial h_r(x,y)}{\partial y}(t-a)^r+rH\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\partial^2 h_r(x,y)}{\partial y^2}(t-a)^r+$$

$$+r\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r}h_{r-k}(x,y)\frac{\partial^2 h_k(x,y)}{\partial y^2}(t-a)^r+r\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r}\frac{\partial h_{r-k}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial h_k(x,y)}{\partial y}(t-a)^r$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $(t-a)^r$

$$(r+1)h_{r+1}(x,y)=r\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial h_r(x,y)}{\partial x}+H\frac{\partial^2 h_r(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_r(x,y)}{\partial y^2}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial h_r(x,y)}{\partial y}\right)+$$

$$+r\sum_{k=0}^{r}\left[\left(\frac{\partial^2 h_r(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_r(x,y)}{\partial y^2}\right)h_{r-k}+\frac{\partial h_{r-k}(x,y)}{\partial x}\frac{\partial h_k(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial h_{r-k}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial h_k(x,y)}{\partial y}\right]$$

и получаем рекуррентную формулу для нахождения функций $h_r(x,y), r=1,2,3,\ldots,$ $h_0(x,y)$ − известная функция из начального условия (3).

$$h_{r+1}(x,y)=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial h_r(x,y)}{\partial x}+H\frac{\partial^2 h_r(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_r(x,y)}{\partial y^2}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial h_r(x,y)}{\partial y}\right)\frac{r}{r+1}+$$

$$+\sum_{k=0}^{r}\left[\left(\frac{\partial^2 h_r(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_r(x,y)}{\partial y^2}\right)h_{r-k}+\frac{\partial h_{r-k}(x,y)}{\partial x}\frac{\partial h_k(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial h_{r-k}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial h_k(x,y)}{\partial y}\right]\frac{r}{r+1}$$

Заменим бесконечную сумму (5) на конечную, получаем приближенное решение вспомогательной задачи

$$h(x,y,t)=h_0(x,y)+\sum_{k=1}^{N}h_k(x,y)(t-a)^k=\sum_{m=0}^{N}h_m(x,y)(t-a)^m \qquad (7)$$

Решением исходной задачи (1),(2) при $t\in[0,T],(x,Y)\in D\subset R^2$, где $T>0$ − любое число, D − произвольная область на плоскости, будет последовательность решений вспомогательных задач при $a=0,a=\tau,a=2\tau,\ldots,a=T-\tau$. Величина T должна быть кратной τ. При $a=0$ функцию $h_0(x,y)$ берем из условия (2). Решение вспомогательной задачи будет решением исходной задачи на участке $t\in[0,\tau]$. Далее решаем задачу (3),(4), полагая $a=\tau,h_0(x,y)=h(x,y,\tau)$. Решение вспомогательной задачи при $a=\tau$ будет решением основной задачи на промежутке $t\in[\tau,2\tau]$. Продолжая процесс таким образом, находим решение на всем промежутке $[0,T]$.

3. Заключение.

Данный подход к решению начальной задачи следует реализовывать в MathCad, Matematica или других математических пакетах, в которых возможны символьные преобразования математических выражений и аналитическое вычисление производных. В численных экспериментах количество слагаемых N в формуле (7) следует увеличивать, а величину шага τ уменьшать до тех пор, пока дальнейшее изменение этих параметров не приводит к изменению решения исходной начальной задачи в рамках требуемой точности. Данный подход применялся для решения краевых, начальных и обратных задач для нелинейных дифференциальных уравнений и систем [2-5].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Самарский А.А., Михайлов А.П.** Математическое моделирование. Идеи.Методы.Примеры. – М: Физматлит, 2002. – 320 с.
2. **Семенова В.Н.** Приложение степенных рядов к решению краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений// Сб. ст. международной конференции «Современные проблемы прикладной мкиематики и математического моделирования». –Воронеж, 2009. – С. 39–55.
3. **Семенова В.Н.** Об одном подходе к решению начальных задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Сборник научных статей «Развитие и перспективы вузовской науки и образования в современных условиях». – Димитровград, 2013. – С. 52–55.
4. **Семенова В.Н.** Численное решение обратной задачи для системы нелинейных дифференциальных в частных производных// Вестник ДИТИ. – 2013. – № 1. – С .18–21.
5. **Семенова В.Н.** Об одном подходе к исследованию пространственно-временной модели распределенной биологической системы // Сборник научных статей «Развитие и перспективы вузовской науки и образования в современных условиях». – Димитровград, 2014. – С. 17–21.

REFERENCES

1. **Samarskii A.A., Mikhailov A.P.** Principles of Mathematical Modeling. Ideas, Methods, Examples. – London and NewYork: Taylor and Francis, 2002. – 349 p.
2. **Semenova V.N.** Application of power series to the solution of boundary value problems for nonlinear differential equations [Prilogzeniye stepennykh ryadov k resheniyu kraevykh zadach dlya nelineynych differentsialnych uravneniy] // Sbornik statey mezdunarodnoy konferentsii «Sovremennyye problem prikladnoy mamemamiki i matematicheskogo programmirovaniya». – Voronezh, 2009. – P.163–164. (in Russian)
3. **Semenova V.N.** An approach to the solution of initial value problems for systems of nonlinear differential equations in partial derivatives [Ob odnom podchode k resheniyu nachalnych zadach dlia system nelineynych differentsialnych uravneniy v chastnych proizvodnych] //Sbornik statey «Razvitie i perspectivy vuzovskoy nauki i obrazovaniya v sovremennych usloviyach». – Dimitrovgrad, 2013. – P. 52–55. (in Russian)
4. **Semenova V.N.** Numerical solution of the inverse problem for a system of nonlinear differential equations in partial derivatives [Chislennoye resheniye obratnoy zadachyi dlya system nelineynych differentsialnych uravneniy] // Vestnik DITI. – 2013. – №1. – P. 18–21. (in Russian)
5. **Semenova V.N.** An approach to the study of spatial-temporal model of distributed biological system [Ob odnom podchode k issledovaniyu prostranstvenno-vremennoy raspredelennoy biologicheskoy sistemy] // Sbornik statey «Razvitie i perspectivy vuzovskoy nauki i obrazovaniya v sovremennych usloviyach. Chast' 1». – Dimitrovgrad, 2014 – P. 17–21. (in Russian)